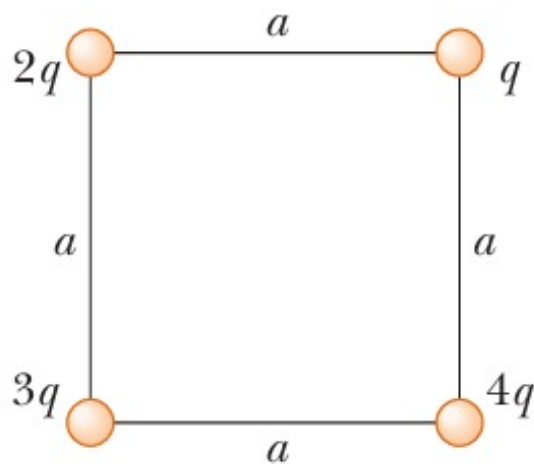


Ejercicio 17: Campo eléctrico y fuerza resultante en un cuadrado

Física - Electrostática



Enunciado

En las esquinas de un cuadrado de lado a , existen cuatro partículas con carga, como se muestra en la figura. Se pide:

- Determinar la magnitud y dirección del campo eléctrico en la ubicación de la carga q .
- Determinar la fuerza eléctrica total ejercida sobre la carga q .

1. Identificación del problema

La carga q se encuentra en la esquina superior derecha del cuadrado. El campo eléctrico en ese punto es producido por las otras tres cargas:

- $2q$, ubicada en la esquina superior izquierda.
- $3q$, ubicada en la esquina inferior izquierda.

- $4q$, ubicada en la esquina inferior derecha.

La carga q no produce campo eléctrico sobre sí misma. Por eso, solamente analizamos el efecto de $2q$, $3q$ y $4q$.

Idea clave: el campo eléctrico total se obtiene sumando vectorialmente los campos eléctricos producidos por cada carga.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_{2q} + \vec{E}_{3q} + \vec{E}_{4q}$$

2. Sistema de referencia

Tomamos la esquina superior derecha, donde está la carga q , como el punto donde se calculará el campo eléctrico.

Usaremos:

- Eje x positivo hacia la derecha.
- Eje y positivo hacia arriba.

Como todas las cargas dadas son positivas, los campos eléctricos producidos en la posición de q apuntan alejándose de cada carga fuente.

3. Campo eléctrico producido por la carga $2q$

La carga $2q$ está a una distancia a de la carga q , sobre la misma línea horizontal.

$$E_{2q} = k \frac{2q}{a^2}$$

Como $2q$ es positiva, el campo en la posición de q apunta hacia la derecha, es decir, en dirección $+x$.

Por tanto:

$$\vec{E}_{2q} = \frac{2kq}{a^2} \hat{i}$$

Componentes:

$$E_{2q,x} = \frac{2kq}{a^2}$$

$$E_{2q,y} = 0$$

4. Campo eléctrico producido por la carga $4q$

La carga $4q$ está a una distancia a por debajo de la carga q .

$$E_{4q} = k \frac{4q}{a^2}$$

Como $4q$ es positiva, el campo en la posición de q apunta hacia arriba, es decir, en dirección $+y$.

Por tanto:

$$\vec{E}_{4q} = \frac{4kq}{a^2} \hat{j}$$

Componentes:

$$E_{4q,x} = 0$$

$$E_{4q,y} = \frac{4kq}{a^2}$$

5. Campo eléctrico producido por la carga $3q$

La carga $3q$ está en la esquina inferior izquierda. La distancia desde $3q$ hasta la ubicación de q corresponde a la diagonal del cuadrado.

Por Pitágoras:

$$r = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

La magnitud del campo producido por $3q$ es:

$$E_{3q} = k \frac{3q}{(a\sqrt{2})^2}$$

$$E_{3q} = k \frac{3q}{2a^2}$$

$$E_{3q} = \frac{3kq}{2a^2}$$

Este campo apunta en dirección diagonal hacia arriba y hacia la derecha, formando un ángulo de 45° con el eje x .

Descomposición vectorial

$$E_{3q,x} = E_{3q} \cos 45^\circ$$

$$E_{3q,y} = E_{3q} \sin 45^\circ$$

Como:

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

entonces:

$$E_{3q,x} = \frac{3kq}{2a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E_{3q,x} = \frac{3kq}{2\sqrt{2}a^2}$$

$$E_{3q,y} = \frac{3kq}{2\sqrt{2}a^2}$$

Por tanto:

$$\vec{E}_{3q} = \frac{3kq}{2\sqrt{2}a^2} \hat{i} + \frac{3kq}{2\sqrt{2}a^2} \hat{j}$$

6. Suma de componentes del campo eléctrico

Ahora sumamos las componentes en x y en y .

Componente en x

$$E_x = E_{2q,x} + E_{3q,x} + E_{4q,x}$$

$$E_x = \frac{2kq}{a^2} + \frac{3kq}{2\sqrt{2}a^2} + 0$$

Factorizando $\frac{kq}{a^2}$:

$$E_x = \frac{kq}{a^2} \left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)$$

Componente en y

$$E_y = E_{2q,y} + E_{3q,y} + E_{4q,y}$$

$$E_y = 0 + \frac{3kq}{2\sqrt{2}a^2} + \frac{4kq}{a^2}$$

Factorizando $\frac{kq}{a^2}$:

$$E_y = \frac{kq}{a^2} \left(4 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)$$

7. Campo eléctrico total en forma vectorial

El campo eléctrico total es:

$$\vec{E} = \frac{kq}{a^2} \left[\left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \left(4 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right]$$

8. Magnitud del campo eléctrico total

Usamos la fórmula de magnitud de un vector:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

Sustituyendo:

$$E = \frac{kq}{a^2} \sqrt{\left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(4 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^2}$$

Por tanto:

$$E = \frac{kq}{a^2} \sqrt{\left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(4 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^2}$$

Aproximando:

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1,061$$

$$E_x \approx \frac{kq}{a^2}(3,061)$$

$$E_y \approx \frac{kq}{a^2}(5,061)$$

$$E \approx \frac{kq}{a^2} \sqrt{(3,061)^2 + (5,061)^2}$$

$$E \approx \frac{kq}{a^2}(5,915)$$

$$E \approx 5,92 \frac{kq}{a^2}$$

9. Dirección del campo eléctrico

La dirección se calcula mediante:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{E_y}{E_x} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{4 + \frac{3}{2\sqrt{2}}}{2 + \frac{3}{2\sqrt{2}}} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{5,061}{3,061} \right)$$

$$\theta \approx 58,8^\circ$$

$$\theta \approx 58,8^\circ \text{ sobre el eje } +x$$

10. Fuerza eléctrica total sobre la carga q

La fuerza eléctrica sobre una carga ubicada en un campo eléctrico está dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Como la carga sobre la que se ejerce la fuerza es q , entonces:

$$\vec{F} = q \left[\frac{kq}{a^2} \left(\left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \left(4 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right) \right]$$

$$\vec{F} = \frac{kq^2}{a^2} \left[\left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \left(4 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right]$$

La magnitud de la fuerza es:

$$F = qE$$

$$F \approx q \left(5,92 \frac{kq}{a^2} \right)$$

$$F \approx 5,92 \frac{kq^2}{a^2}$$

La dirección de la fuerza es la misma que la del campo, porque la carga q es positiva:

$$\theta \approx 58,8^\circ \text{ sobre el eje } +x$$

11. Respuesta final

Campo eléctrico en la ubicación de la carga q :

$$\vec{E} = \frac{kq}{a^2} \left[\left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \left(4 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right]$$

$$E \approx 5,92 \frac{kq}{a^2}$$

$$\theta \approx 58,8^\circ \text{ sobre el eje } +x$$

Fuerza eléctrica total sobre la carga q :

$$\vec{F} = \frac{kq^2}{a^2} \left[\left(2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \left(4 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right]$$

$$F \approx 5,92 \frac{kq^2}{a^2}$$

$$\theta \approx 58,8^\circ \text{ sobre el eje } +x$$

12. Interpretación física

El campo eléctrico resultante apunta hacia arriba y hacia la derecha. Esto ocurre porque:

- La carga $2q$ empuja el campo hacia la derecha.
- La carga $4q$ aporta una componente fuerte hacia arriba.
- La carga $3q$ aporta componentes tanto hacia la derecha como hacia arriba.

Como la componente vertical es mayor que la horizontal, el ángulo queda más cercano al eje y que al eje x .