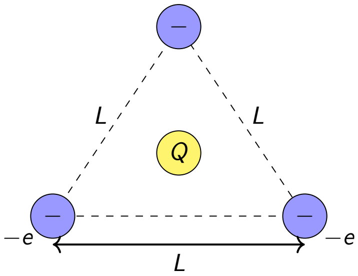
Problema 1.2: equilibrio electrostatico en un triangulo equilatero

Resolucion paso a paso con diagramas y descomposicion vectorial

Electrostatica



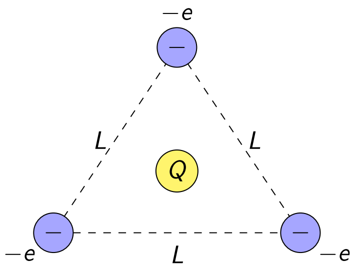
Enunciado fisico del problema

Datos

- Triangulo equilatero de lado L.
- En cada vertice hay una carga negativa $-e$.
- En el centro de gravedad se coloca una carga Q.

Objetivo

Determinar el valor y el signo de Q para que el sistema completo permanezca en equilibrio.



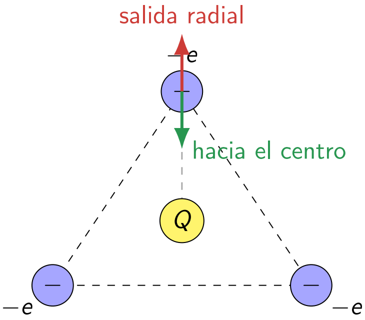
Paso 1: por simetria basta estudiar un vertice

Como las tres cargas de los vertices son iguales y el triangulo es equilatero, las condiciones de equilibrio son identicas en los tres vertices.

Estudiamos la carga superior $-e$.

Fuerzas sobre la carga superior

1. Repulsion producida por la carga inferior izquierda.
2. Repulsion producida por la carga inferior derecha.
3. Fuerza producida por la carga central Q.



Paso 2: ley de Coulomb para las cargas de los vertices

La distancia entre dos vertices cualesquiera es L.

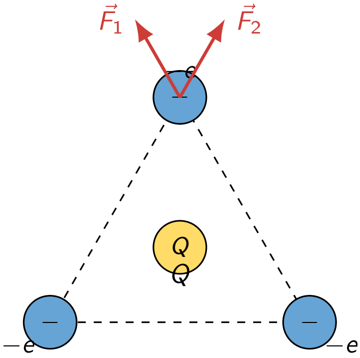
Entre dos cargas $-e$ y $-e$ hay repulsion. La magnitud de cada fuerza es:

$$F = k\frac{|(-e)(-e)|}{L^2}$$

$$\boxed{F = \frac{ke^2}{L^2}}$$

Donde k es la constante de Coulomb:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = \frac{ke^2}{L^2}$$

Paso 3: direccion de las dos fuerzas repulsivas

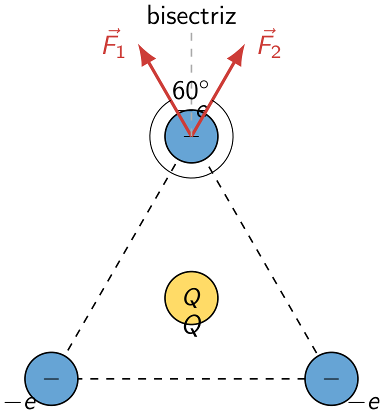
Cada carga inferior repele a la carga superior.

Por eso, las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ sobre el vertice superior apuntan hacia afuera del triangulo.

Como el triangulo es equilatero, el angulo entre esas dos fuerzas es:

$$\boxed{60^\circ}$$

La bisectriz de ese angulo coincide con la linea que une el vertice con el centro.



Paso 4: descomposicion vectorial de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$

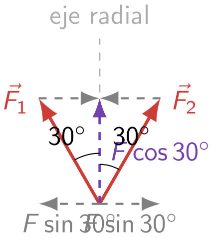
Tomamos un eje radial vertical que pasa por el vertice superior y el centro.

Cada fuerza forma 30° con el eje radial, porque el angulo total entre ellas es 60°.

$$F_{\text{radial}} = F \cos 30^\circ$$

$$F_{\text{transversal}} = F \sin 30^\circ$$

Las componentes transversales son iguales y opuestas, por tanto se cancelan.



Paso 5: suma de componentes

Las componentes horizontales o transversales se anulan:

$$F \sin 30^\circ - F \sin 30^\circ = 0$$

Las componentes radiales se suman:

$$F_R = F \cos 30^\circ + F \cos 30^\circ$$

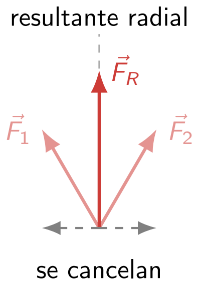
$$F_R = 2F \cos 30^\circ$$

Como:

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces:

$$F_R = 2F \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}F$$



Paso 6: sustituir la magnitud de Coulomb

Ya teniamos:

$$F = \frac{ke^2}{L^2}$$

La resultante de las dos repulsiones sobre una carga de vertice es:

$$F_R = \sqrt{3}F$$

Sustituyendo:

$$F_R = \sqrt{3}\left(\frac{ke^2}{L^2}\right)$$

Resultado de las repulsiones de los vertices

$$\boxed{F_R = \frac{\sqrt{3}\,ke^2}{L^2}}$$

Esta fuerza apunta radialmente hacia afuera del triangulo.

Paso 7: distancia del centro al vertice

En un triangulo equilatero de lado L, la altura es:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} L$$

El centro de gravedad divide la altura en razon $2:1$ desde el vertice:

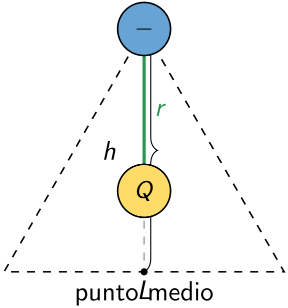
$$r = \frac{2}{3} h$$

Sustituyendo h:

$$r = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} L \right)$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

$$\boxed{r = \frac{L}{\sqrt{3}}}$$



Paso 8: fuerza entre Q y una carga de vertice

La distancia entre la carga central y cualquier vertice es:

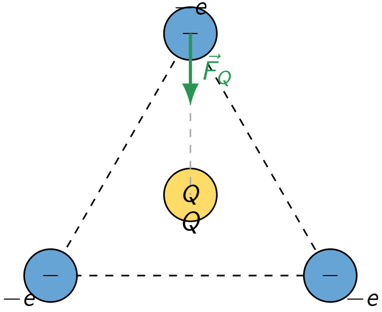
$$r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

La magnitud de la fuerza electrica entre Q y una carga $-e$ es:

$$F_Q = k\frac{|Q(-e)|}{r^2}$$

$$F_Q = k\frac{Qe}{r^2}$$

Para que la carga negativa sea atraida hacia el centro, Q debe ser positiva.



$Q > 0$ atrae a $-e$

Paso 9: expresar F_Q en funcion de L

Partimos de:

$$F_Q = k\frac{Qe}{r^2}$$

Sustituimos:

$$r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$F_Q = k\frac{Qe}{\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{L^2}{3}$$

Entonces:

$$F_Q = k\frac{Qe}{\frac{L^2}{3}}$$

Fuerza atractiva causada por Q

$$\boxed{F_Q = \frac{3kQe}{L^2}}$$

Paso 10: condicion de equilibrio en un vertice

Para que la carga superior este en equilibrio, la fuerza neta debe ser cero:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

La repulsion de las otras dos cargas apunta hacia afuera:

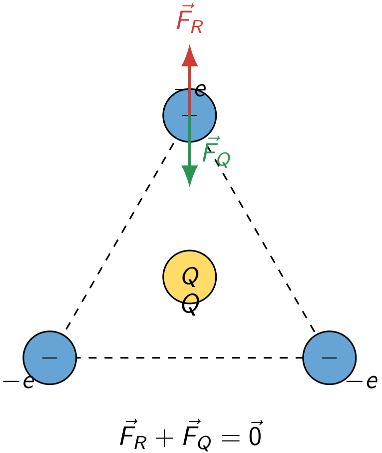
$$F_R = \frac{\sqrt{3}ke^2}{L^2}$$

La atraccion de la carga central apunta hacia adentro:

$$F_Q = \frac{3kQe}{L^2}$$

En equilibrio, sus magnitudes deben ser iguales:

$$\boxed{F_Q = F_R}$$



Paso 11: igualdad de magnitudes

Usamos la condicion:

$$F_Q = F_R$$

Sustituimos ambas expresiones:

$$\frac{3kQe}{L^2} = \frac{\sqrt{3}ke^2}{L^2}$$

Multiplicamos ambos lados por L^2:

$$3kQe = \sqrt{3}ke^2$$

Dividimos entre ke:

$$3Q = \sqrt{3}e$$

Despejamos Q:

$$Q = \frac{\sqrt{3}e}{3}$$

$$\boxed{Q = \frac{e}{\sqrt{3}}}$$

Paso 12: verificacion del signo de Q

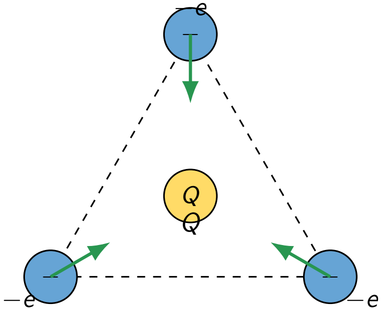
Si Q fuera negativa, repeleria a cada carga $-e$ del vertice.

Eso aumentaria la fuerza hacia afuera y no podria haber equilibrio.

Por tanto, Q debe tener signo positivo para atraer a las cargas negativas hacia el centro.

Resultado final

$$\boxed{Q = +\frac{e}{\sqrt{3}}}$$



la carga central atrae a las tres

Paso 13: equilibrio de la carga central

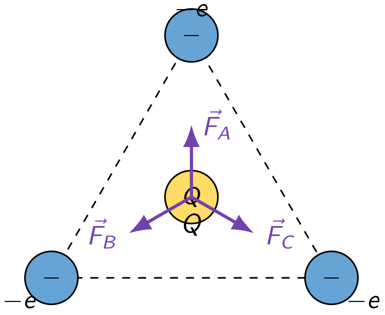
Tambien debemos comprobar la carga central.

Las tres cargas $-e$ atraen a Q con fuerzas iguales, separadas angularmente por 120°.

Por simetria:

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}$$

Por tanto, la carga central tambien queda en equilibrio.



tres fuerzas iguales a 120°

Resumen completo de la solucion

1. Cada vertice siente dos repulsiones de magnitud:

$$F = \frac{ke^2}{L^2}$$

2. La resultante de esas dos repulsiones es:

$$F_R = 2F\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}ke^2}{L^2}$$

3. La distancia del centro al vertice es:

$$r = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

4. La fuerza de la carga central sobre un vertice es:

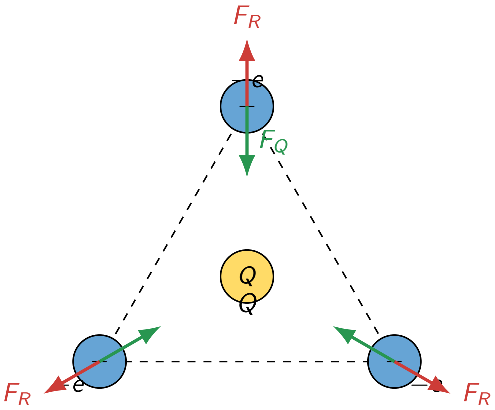
$$F_Q = \frac{3kQe}{L^2}$$

5. En equilibrio:

$$\frac{3kQe}{L^2} = \frac{\sqrt{3}ke^2}{L^2}$$

$$\boxed{Q = +\frac{e}{\sqrt{3}}}$$

Interpretacion fisica final



$$\boxed{Q = +\frac{e}{\sqrt{3}}}$$