Ejercicio 7: Fuerza eléctrica total en un triángulo equilátero

Electrostática - Ley de Coulomb y suma vectorial

Propósito. Resolver paso a paso un problema de fuerza eléctrica en el plano usando la ley de Coulomb, la descomposición de vectores en componentes y la suma vectorial para hallar magnitud y dirección de la fuerza resultante.

1. Enunciado

En las esquinas de un triángulo equilátero existen tres cargas puntuales, como se muestra en la figura. Calcule la fuerza eléctrica total sobre la carga de valor $7.00\,\mu$C.

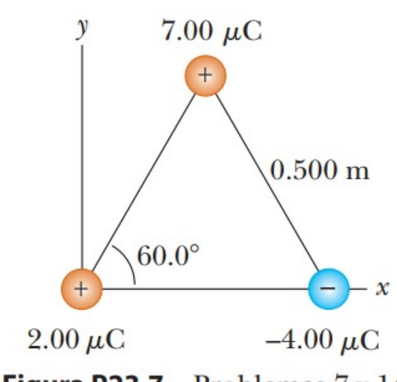


Figura P23.7 Problemas 7 y 14.

2. Datos del problema

Carga	Valor	Ubicación aproximada
q_A	$+2.00\,\mu$C	esquina inferior izquierda
q_B	$-4.00\,\mu$C	esquina inferior derecha
q_C	$+7.00\,\mu$C	esquina superior

Como el triángulo es equilátero, todos sus lados miden:

$$r = 0.500\,\mathrm{m}$$

La constante de Coulomb es:

$$k = 8.99 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

3. Idea física del problema

La carga sobre la cual se calcula la fuerza total es:

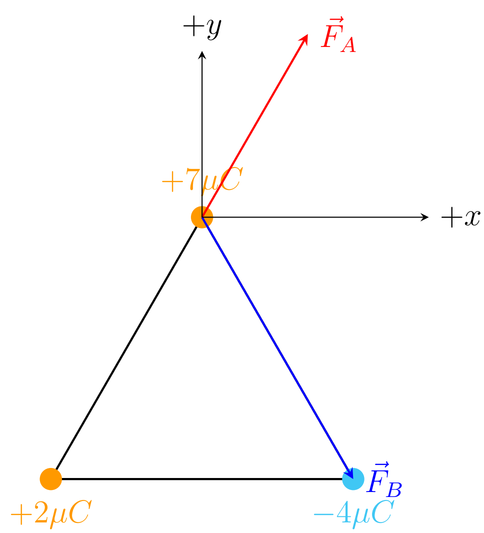
$$q_C = +7.00\,\mu\mathrm{C}$$

Sobre ella actúan dos fuerzas:

- La fuerza ejercida por $q_A = +2.00\,\mu\mathrm{C}$.
- La fuerza ejercida por $q_B = -4.00\,\mu\mathrm{C}$.

Como q_A y q_C son positivas, se repelen. Por tanto, la fuerza de q_A sobre q_C apunta hacia arriba y hacia la derecha.

Como q_B es negativa y q_C positiva, se atraen. Por tanto, la fuerza de q_B sobre q_C apunta hacia abajo y hacia la derecha.



4. Ley de Coulomb

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es:

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

Donde:

- F es la fuerza eléctrica en newtons.
- k es la constante de Coulomb.
- q_1 y q_2 son las cargas eléctricas en coulombs.
- r es la distancia entre las cargas.

Recordemos que:

$$1\,\mu\text{C} = 1 \times 10^{-6}\,\text{C}$$

5. Fuerza de $+2.00\,\mu C$ sobre $+7.00\,\mu C$

$$F_A = k\frac{|q_A q_C|}{r^2}$$

Sustituyendo valores:

$$F_A = (8.99 \times 10^9)\frac{(2.00 \times 10^{-6})(7.00 \times 10^{-6})}{(0.500)^2}$$

$$F_A = 0.503\,\text{N} \approx 0.504\,\text{N}$$

Esta fuerza es de repulsión, por lo tanto apunta alejándose de la carga $+2.00\,\mu C$. En el plano, forma un ángulo de 60° con el eje $+x$.

Descomponemos:

$$F_{Ax} = F_A \cos 60^\circ$$
$$F_{Ay} = F_A \sin 60^\circ$$

$$F_{Ax} = 0.504(0.5) = 0.252\,\text{N}$$
$$F_{Ay} = 0.504(0.866) = 0.436\,\text{N}$$

Entonces:

$$\vec{F}_A = (0.252\,\hat{\imath} + 0.436\,\hat{\jmath})\,\text{N}$$

6. Fuerza de $-4.00\,\mu C$ sobre $+7.00\,\mu C$

$$F_B = k\frac{|q_B q_C|}{r^2}$$

Sustituyendo valores:

$$F_B = (8.99 \times 10^9)\frac{(4.00 \times 10^{-6})(7.00 \times 10^{-6})}{(0.500)^2}$$

$$F_B = 1.007\,\mathrm{N} \approx 1.008\,\mathrm{N}$$

Esta fuerza es de atracción, por lo tanto apunta hacia la carga negativa $-4.00\,\mu C$. En el plano, está dirigida hacia abajo y hacia la derecha, formando 60° por debajo del eje $+x$.

Descomponemos:

$$F_{Bx} = F_B \cos 60^\circ$$

$$F_{By} = -F_B \sin 60^\circ$$

El signo negativo en F_{By} aparece porque la componente vertical apunta hacia abajo.

$$F_{Bx} = 1.008(0.5) = 0.504\,\mathrm{N}$$

$$F_{By} = -1.008(0.866) = -0.873\,\mathrm{N}$$

Entonces:

$$\vec{F}_B = (0.504\,\hat{\imath} - 0.873\,\hat{\jmath})\,\mathrm{N}$$

7. Suma vectorial de las fuerzas

La fuerza total es:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

Sumamos componentes en x:

$$F_{Tx} = F_{Ax} + F_{Bx}$$

$$F_{Tx} = 0.252 + 0.504 = 0.756\,\mathrm{N}$$

Sumamos componentes en y:

$$F_{Ty} = F_{Ay} + F_{By}$$

$$F_{Ty} = 0.436 - 0.873 = -0.437\,\mathrm{N}$$

Por tanto:

$$\boxed{\vec{F}_T = (0.756\,\hat{\imath} - 0.437\,\hat{\jmath})\,\mathrm{N}}$$

8. Magnitud de la fuerza resultante

Usamos el teorema de Pitágoras:

$$F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2}$$

$$F_T = \sqrt{(0.756)^2 + (-0.437)^2}$$

$$F_T = \sqrt{0.5715 + 0.1909}$$

$$F_T = \sqrt{0.7624}$$

$$\boxed{F_T = 0.873\,\mathrm{N}}$$

9. Dirección de la fuerza resultante

El ángulo respecto al eje $+x$ se calcula con:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_{Ty}}{F_{Tx}}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-0.437}{0.756}\right)$$

$$\theta = -30.0^\circ$$

El signo negativo significa que el vector está por debajo del eje $+x$.

$$\boxed{\theta = 30.0^\circ \text{ por debajo del eje } +x}$$

10. Respuesta final

La fuerza eléctrica total sobre la carga de $7.00\,\mu\mathrm{C}$ es:

$$\boxed{\vec{F}_T = (0.756\,\hat{\imath} - 0.437\,\hat{\jmath})\,\mathrm{N}}$$

Su magnitud es:

$$\boxed{F_T = 0.873\,\mathrm{N}}$$

Y su dirección es:

$$\boxed{30.0^\circ \text{ por debajo del eje } +x}$$

11. Conclusión didáctica

Este ejercicio muestra que las fuerzas eléctricas son vectores. Por eso, cuando las cargas están ubicadas en un plano, no basta con calcular magnitudes: también se deben analizar las direcciones, descomponer cada fuerza en componentes x y y, sumar dichas componentes y finalmente hallar la resultante.